Preparación Olimpiada Matemática Española
(Curso 2020-21)
POLINOMIOS II. 30-04-2021

Aspectos teóricos.

- Teorema del resto.
- Regla de Ruffini.
- Raíces enteras y fraccionarias de un polinomio con coeficientes enteros (o fraccionarios).
- Fórmulas de Cardano-Vieta.
- Completar cuadrados.
- ¿Qué hacer con polinomios con raíces comunes?

Problemas de nivel 1.

Fases de distrito de OME. Material preparación en web rsme.

Problema 1.1. Se considera un polinomio $P(x)$ de grado 100, con coeficientes enteros, todos ellos distintos entre sí, y cuyos valores absolutos son menores o iguales que 50. Determinar si $P(x)$ es divisible por $x-1$.

Problema 1.2. Al dividir $p(x)$ por $(x+2),(x-2)$ y por $(x+3)$ se obtienen los restos 4, 8 y 13, respectivamente. Determinar el resto de dividir $p(x)$ por $(x+2)(x-2)(x+3)$.

Problema 1.3. Determina la relación entre b y c para que estén en progresión aritmética las raíces de $x^3+bx^2+cx=0$.

Problema 1.4. Hallar a para que los polinomios: x^2+ax+1 y x^2+x+a tengan al menos una raíz común.

Problema 1.5. Resolver la ecuación : $4x^3+6x^2+12x+5=0$, sabiendo que existen enteros a y b tales que la ecuación dada puede ponerse en la forma: $(x+a)^4=(x+b)^4$.

Problema 1.6. Demostrar que si una ecuación $P(x)=0$ tiene dos raíces inversas, éstas también son raíces de la ecuación $P(\frac{1}{x})=0$.

Aplicar el resultado para resolver la ecuación: $x^4-4x^3+3x^2-8x+2=0$ sabiendo que tiene dos raíces inversas.

Problema 1.7. Resolver la siguiente ecuación sabiendo que una de sus raíces es inversa de otra:

$$\sqrt{2}x^4-3x^3+3\sqrt{2}x^2-6x+2\sqrt{2}=0.$$

Problema 1.8. Descomponer el polinomio $P(x) = x^5 - 209x + 56$ en producto de dos factores con coeficientes enteros, sabiendo que se anula para dos valores x_1, x_2 recíprocos entre sí.

Problema 1.9. Se consideran las ecuaciones de segundo grado con coeficientes enteros:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + b'x + c' = 0 \end{array} \right. \qquad \text{verificando} \quad (b - b')^2 + (c - c')^2 > 0.$$

Probar que, si las dos ecuaciones tienen una raíz común, las otras raíces son enteras y distintas.

Problema 1.10. Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los cubos de las de: $ax^2 + bx + c = 0$.

Problema 1.11. Se consideran las parábolas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = cx^2 + d & \quad (d < 0 < c) \\ x = ay^2 + b & \quad (b < 0 < a) \end{array} \right.$$

que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos están en una misma circunferencia.

Olimpiada Matemática de Andalucía.

Problema 1.12. (III Olimpiada Matemática de Andalucía, 2021). Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(2018)p(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.

Problemas de nivel 2. Fase nacional de OME

Problema 2.1. (OME-1976-77, XIV-OME) Se dan los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas, que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + (X - A_2)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

Problema 2.2. (OME-1975-76, XIII-OME) El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que, rompiéndolo en dos partes, existe una depreciación de su valor. ¿Cuándo es máxima la depreciación?

Problema 2.3. (OME-1982-83, XIX-OME) Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0$$

Problema 2.4. (OME-2001-02, XXXVIII-OME) Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen

$$P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y)$$

para todos los números reales x e y

Problema 2.5. OME-2002-03, XXXIX-OME) Sea x un número real tal que $x^3+2x^2+10x = 20$. Demostrar que tanto x como x^2 son irracionales.

Problema 2.6. (OME-1969-70, VII-OME) Sabiendo que los polinomios

$$\begin{array}{c} p(x) = 2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25 \\ q(x) = x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50 \end{array}$$

tienen dos raíces dobles coumnes, determinar todas sus raíces.

Problema 2.7. (OME-1978-79, XV-OME) Si z_1, z_2 son las raíces de la ecuación con coeficientes reales $z^2 + az + b = 0$. probar que $z_1^n + z_2^n$ es un número real para cualquier valor natural de n. En el caso de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$, expresar, en función de n, dicha suma.

Problema 2.8. (OME-1986-87, XXIII-OME) Para cada número natural n se considera el polinomio

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostrar que la ecuación $P_n(x) = 0$ tiene una raíz c_n y sólo una en el intervalo $(0, 1)$.

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$